

Skript - Strömungen

Autor: Norbert Marxer
Erstellung: 25.05.2025 (Version 1)

Inhaltsangabe

Inhaltsangabe	1
Reibungsfreie Strömungen	4
Einleitung	4
Volumenstrom \dot{V}	4
Kontinuitätsgleichung $A_1 v_1 = A_2 v_2$	4
Bernoulli-Gleichung	5
Größenordnungen der drei Drücke	6
Druckmessungen bei Strömungen	6
Anwendung - Wasserstrahl im Waschbecken	9
Laminare Strömungen	10
Dynamische Viskosität	10
Laminare Strömung durch ein Rohr und Gesetz von Hagen-Poiseuille	10
Laminare Strömung um eine Kugel und Gesetz von Stokes	11
Pitch Drop Experiment	12
Turbulente Strömungen	14
Strömungswiderstand	14
Reynold'sches Ähnlichkeitsgesetz	16
Magnus Effekt	17
Navier-Stokes Gleichung	18
Anhang	19
Anhang A Experimente	20
Anhang B Quellen	22
Anhang C Historische Entwicklung	23

Allgemein

Unter einer **Strömung** (engl. flow) versteht man die Bewegung von Fluiden (d.h. Flüssigkeiten und Gasen). Die Strömungsgesetze für Flüssigkeiten gelten auch für Gase, wenn die Strömungsgeschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist.

Ursache von Strömungen sind die Schwerkraft und Druckunterschiede. Die Strömung hat an jeder Position \vec{r} im Raum eine Geschwindigkeit \vec{v} . Dies kann mit Hilfe eines Vektorfeldes oder mit Hilfe von Stromlinien übersichtlich dargestellt werden.

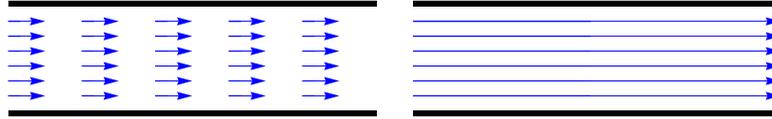


Abbildung Vektorfeld (links) und Stromlinien (rechts)

Das Einzeichnen von Vektoren an jeder Stelle würde natürlich zu völlig unübersichtlichen Abbildungen führen. Deshalb wird bei der Darstellung des **Vektorfeldes** der Geschwindigkeitsvektor nur an ausgewählten Stellen eingezeichnet, und die Skalierung der Vektoren wird so gewählt ist, dass die Abbildung möglichst übersichtlich ist.

Bei der **Stromlinien**-Darstellung werden die Linien so eingezeichnet, dass die Tangenten an die Stromlinien die Richtung der Strömung angeben und der Abstand benachbarter Stromlinien ein Mass für die Schnelligkeit v ist. Bei einer stationären Strömung sind die Stromlinien zeitlich konstant.

Bei der Analyse von Strömungen werden **drei Arten von Strömungen** unterschieden ...

- Reibungsfreie Strömungen,
- Laminare Strömungen, die eine innere Reibung haben,
- Turbulente Strömungen, die zusätzlich Wirbelbildungen haben.

Im Folgenden ist eine Zusammenfassung des Inhalt gegeben. Die aufgeführten Formeln und Formelzeichen werden weiter hinten genauer erklärt.

Abschnitt “Reibungsfreie Strömungen”

Im Abschnitt “Reibungsfreie Strömungen” führen wir den Begriff des Volumenstroms ein. Der Volumenstrom \dot{V} entspricht dem Volumen, das in einer bestimmten Zeit an einer bestimmten Querschnittsfläche A vorbeiströmt, und hängt nur von der betrachteten Querschnittsfläche und der Geschwindigkeit der Strömung ab ...

$$\dot{V} = \frac{V}{t} = A v$$

Volumenstrom

Wir stellen fest, dass für eine inkompressible Flüssigkeit (d.h. konstante Dichte), der Volumenstrom entlang eines Rohrs konstant ist. Für zwei Stellen gilt somit ...

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Kontinuitätsgleichung

Dann leiten wir die wichtige Bernoulli-Gleichung mit Hilfe der Energieerhaltung her ...

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstant}$$

Bernoulli-Gleichung

Sie besagt, dass die Summe aus hydrostatischem Druck (Summe aus Kolben- und Schweredruck: $p + \rho g h$) und dynamischen Druck ($\frac{1}{2} \rho v^2$) entlang einer Stromlinie konstant ist.

Wir geben auch noch **Größenordnungen** für die drei verschiedenen Drücke an.

Im letzten Teil gehen wir auch noch auf die **Druckmessungen** ein. Wir zeigen, wie ein **U-Rohr** für Druckmessungen funktioniert und wie dieses U-Rohr an ein Rohr gekoppelt werden muss (**U-Rohr, Prandtl-Staurohr, Pitot-Rohr, Venturi-Rohr**), um den statischen, den dynamischen, den Gesamtdruck und die Geschwindigkeiten der Strömung zu messen.

Abschnitt “Laminare Strömungen”

Nachdem wir im vorangehenden Abschnitt von idealen, reibungsfreien Strömungen ausgegangen sind, beschäftigen wir uns dann mit realistischeren Situationen, in denen die Flüssigkeiten eine innere Reibung (Viskosität, Zähigkeit) haben. Diese Eigenschaft wird durch die physikalische Grösse “**dynamische Viskosität**” η beschrieben. Bei kleineren Geschwindigkeiten sind die Stromlinien parallel zueinander

(Schicht gleitet auf Schicht): Wir haben eine sogenannte **laminare Strömung** mit dem folgendermassen definierten Strömungswiderstand ...

$$F_R = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta d} \quad \text{Strömungswiderstand bei einer laminaren Strömung}$$

Für einfachere experimentelle Situationen können einige Berechnungen durchgeführt werden.

Für eine Strömung in einem **Rohr** ergibt sich ein parabelförmiges **Geschwindigkeitsprofil**. Die Strömung ist in der Mitte des Rohrs am grössten. Es lässt sich auch der Volumenstrom (**Gesetz von Hagen-Poiseuille**) sowie der Strömungswiderstand berechnen.

Auch bei einer laminaren Strömung um eine Kugel kann eine Gleichung für den Strömungswiderstand (**Gesetz von Stokes**) angegeben werden. Dieses Gesetz kann auch dazu verwendet werden, um die dynamische Viskosität einer Flüssigkeit **experimentell** zu bestimmen.

Im letzten Abschnitt gehen wir noch auf das längste laufende Labor-Experiment ein, das sogenannte **“Pitch Drop Experiment”**, bei dem Teer auf Grund der hohen Viskosität SEHR langsam aus einem Trichter herausströmt.

Abschnitt “Turbulente Strömungen”

Bei höheren Geschwindigkeiten sind die Strömungen nicht mehr laminar, sondern turbulent: Es bilden sich Wirbel.

Für analytische Berechnungen ist die Situation bei turbulenten Strömungen zu kompliziert (**Navier-Stokes Gleichungen**). Es sind höchstens numerische Simulationen oder experimentelle Untersuchungen möglich. Für viele Situationen lässt sich der Strömungswiderstand F_W durch eine einfache Beziehung angeben ...

$$F_W = c_W \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) A \quad \text{Strömungswiderstand bei turbulenten Strömungen}$$

Der in dieser Gleichung verwendete **Widerstandsbeiwert** c_W ist eine experimentelle Grösse und hängt von der gegebenen Situation ab. Bei einfachen geometrischen Formen kann der Wert auch in Tabellen nachgeschlagen werden.

Eine ganz wichtige Grösse ist die Reynolds-Zahl ...

$$Re = \frac{L \rho v}{\eta} \quad \text{Reynolds-Zahl}$$

Mit ihr lässt sich abschätzen, ob es sich bei einer gegebenen experimentellen Situation um eine laminare oder eine turbulente Strömung handelt.

Reibungsfreie Strömungen

Einleitung

Im einfachsten Fall haben wir es mit reibungsfreien Strömungen ohne innere Reibung und Wirbel zu tun. Die folgenden zwei Drücke, die wir im Kapitel "Ruhende Flüssigkeiten und Gase" bereits diskutiert haben, werden wir auch hier intensiv verwenden.

Kolbendruck Dies ist der von aussen auf das Fluid wirkende Druck.

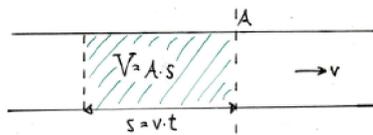
Schweredruck Dies ist der vom Gewicht der Flüssigkeit oder des Gases auf die darunter liegende Flüssigkeits- oder Gasschicht ausgeübte Druck. Der Schweredruck steigt (bei nicht allzu grossen Höhendifferenzen) linear mit der Tiefe an.

Neu werden wir hier zusätzlich den dynamischen Druck diskutieren.

Dynamischer Druck Dies ist der mit der Geschwindigkeit der Strömung zusammenhängende Druck.

Volumenstrom \dot{V}

Wir untersuchen die Strömung, die in einem Rohr mit der Geschwindigkeit v und der Querschnittsfläche A fliesst.



Uns interessiert der **Volumenstrom \dot{V}** , d.h. das Volumen V , das pro Zeit t an einer bestimmten Querschnittsfläche A vorbeiströmt.

Mithilfe der obigen Zeichnung sieht man, dass in der Zeit t das Volumen $V = A s = A v t$ vorbeiströmt. Der Volumenstrom $\dot{V} = \frac{V}{t}$ ergibt sich somit zu ...

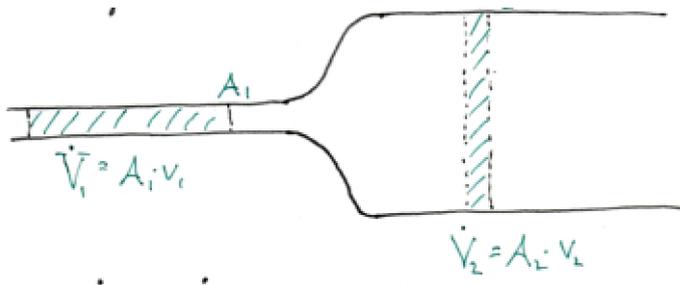
$$\dot{V} = A v \quad \text{Volumenstrom}$$

Der Volumenstrom hat die SI-Einheit ...

$$[\dot{V}] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Kontinuitätsgleichung

Wenn sich das Rohr verengt oder erweitert, und wir von einer inkompressiblen Flüssigkeit und somit von einer konstanten Dichte ausgehen, muss durch jeden Querschnitt in einer bestimmten Zeit das gleiche Volumen vorbeiströmen.



Die Volumenströme an den beiden Stellen sind somit gleich ...

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2$$

oder $A_1 v_1 = A_2 v_2$ für eine inkompressible Flüssigkeit

Diese Gleichung wird **Kontinuitätsgleichung** oder Durchflussgleichung genannt und gilt bei inkompressiblen Flüssigkeiten.

Bei Gasen muss eine eventuelle Dichteänderung berücksichtigt werden. Die Kontinuitätsgleichung nimmt dann die folgende Form an ...

$$A_1 v_1 \rho_1 = A_2 v_2 \rho_2 \quad \text{bei Dichteänderung (Gase)}$$

Bernoulli-Gleichung

Jetzt kommen wir zu einer zentralen Gleichung der Strömungslehre: der Bernoulli Gleichung ([Link](#)). Sie ist die Grundgleichung von 1-dimensionalen Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen und gilt näherungsweise für viele Strömungen in realen Flüssigkeiten und Gasen.

Die Bernoulli-Gleichung beruht auf dem Energieerhaltungssatz. Es muss Arbeit geleistet werden, um die innere Energie eines Körpers zu erhöhen.

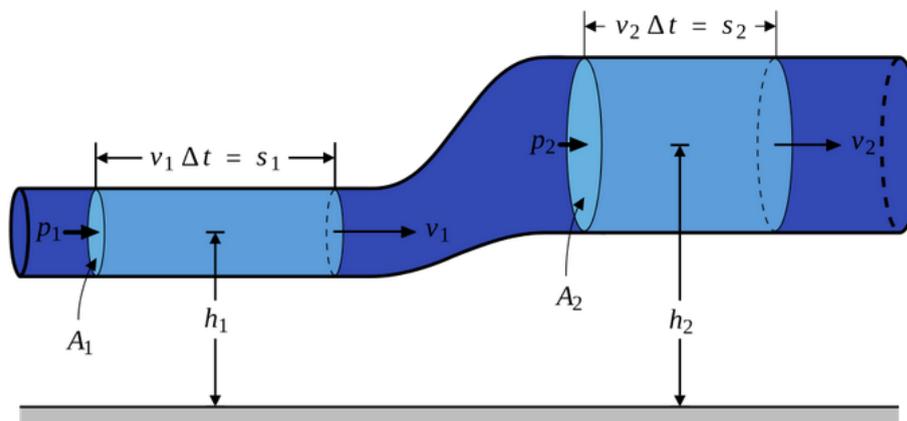


Abbildung Illustration zu Herleitung der Bernoulli-Gleichung ([Link](#))

Wir schieben die Flüssigkeitssäule nach rechts und betrachten die zentrale Stromlinie. Für die Herleitung der Bernoulli-Gleichung brauchen wir die folgenden Formeln ...

- $W = F s$ Arbeit ist Kraft mal Weg
- $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$ Bewegungsenergie (kinetische Energie)
- $E_{\text{pot}} = m g h$ Potentielle Energie der Lage
- $p = \frac{F}{A}$ Druck ist Kraft pro Fläche
- $A_1 v_1 = A_2 v_2$ Kontinuitätsgleichung
- $v_1 = v_2$ inkompressible Flüssigkeit

Wir wenden links eine Kraft an und schieben ein Volumenelement V nach oben. Wir leisten die Arbeit ...

$$W = F_1 s_1 = p_1 A_1 s_1 = p_1 V_1$$

Ebenso leistet das System Arbeit an der oberen Querschnittsfläche. Wir erhalten als Netto-Arbeit ...

$$W = p_1 V_1 - p_2 V_2 = (p_1 - p_2) V \quad \text{wegen } V_1 = V_2 \text{ können wir auf den Index verzichten}$$

Diese Arbeit steckt in der Zunahme der Bewegungsenergie und der Lageenergie ...

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho V v_1^2 = \frac{1}{2} \rho V (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta E_{\text{pot}} = m g h_2 - m g h_1 = m g (h_2 - h_1) = \rho V g (h_2 - h_1)$$

Gleichsetzen der geleisteten Arbeit mit der Änderung der inneren Energien ergibt ...

$$(p_1 - p_2) V = \frac{1}{2} \rho V (v_2^2 - v_1^2) + \rho V g (h_2 - h_1)$$

Wenn wir durch das Volumen V dividieren und die Größen mit dem Index 1 nach links und diejenigen mit dem Index 2 nach rechts bringen, erhalten wir ...

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

oder $p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstant}$

Dies ist die **Bernoulli-Gleichung**, die aussagt, dass entlang einer Stromlinie der Ausdruck $p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2$ konstant ist.

Dabei ist ...

$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2$	der Gesamtdruck
$p + \rho g h$	der hydrostatische Druck
$\frac{1}{2} \rho v^2$	der dynamische Druck

Wenn ein Rohr auf gleicher Höhe verläuft, gilt vereinfacht ...

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstant}$$

Größenordnungen der drei Drücke

Wir haben drei verschiedene Drücke kennengelernt. Im Folgenden sollen nun einige Abschätzungen der Größenordnungen durchgeführt werden. Wir gehen dabei von **Wasser** aus.

Um einen **Schweredruck** von 1 bar zu erzielen, ist gemäss $p = \rho g h$ eine Wassersäule ...

$$h = \frac{p}{\rho g} \approx \frac{10^5 \text{ Pa}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 10.2 \text{ m}$$

von zirka **10 m** Höhe notwendig. Dies wussten wir bereits!

Um einen **Kolbendruck** von 1 bar bei einer Normalkraft von 800 Newton (Gewichtskraft eines Körpers von zirka 80 kg Masse) zu erzielen, ist gemäss der Definition des Drucks $p = \frac{F_N}{A}$ eine Fläche ...

$$A = \frac{F_N}{p} = \frac{800 \text{ N}}{10^5 \text{ Pa}} = 0.008 \text{ m}^2 = 80 \text{ cm}^2$$

von zirka **80 cm²** notwendig.

Um einen **dynamischen Druck** von 1 bar zu erzielen, ist gemäss $p = \frac{1}{2} \rho v^2$ eine Geschwindigkeit ...

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 14.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

von zirka **14.1 m/s** notwendig.

Druckmessungen bei Strömungen

U-Rohr (ruhende Flüssigkeit)

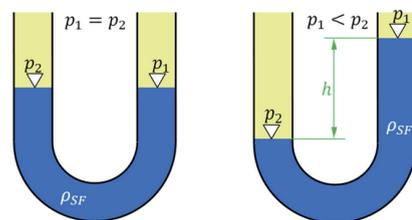


Abbildung U-Rohr Manometer bei gleichem und ungleichem Druck

Mit Hilfe eines U-Rohrs können Druckdifferenzen gemessen werden. Das U-Rohr ist mit einer Flüssigkeit (z.B. Quecksilber) gefüllt. Wenn der Druck auf einer Seite grösser ist, dann verschiebt sich die Flüssigkeitssäule. Aus dem Unterschied der Höhen kann die Druckdifferenz zwischen den zwei Seiten bestimmt werden, denn (gemäss Schweredruck) ...

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_{\text{Hg}} g h$$

Bemerkungen

- Wenn die eine Seite des U-Rohrs offen ist, dann misst man die Abweichung zum Umgebungsdruck (Luftdruck).
- Wenn die eine Seite des U-Rohrs verschlossen ist (Vakuum), dann misst man mit dem U-Rohr den absoluten Druck.
- Dieses Manometer wird heutzutage nur noch selten verwendet, da die gebräuchlichen Flüssigkeiten entweder giftig sind oder leicht verdunsten. In diesem Skript dienen sie aber gut zur Illustration der bei Strömungen auftretenden Drücke.

U-Rohr, Prandtl-Staurohr, Pitot-Rohr, Venturi-Rohr

Das U-Rohr oder ein einfaches Rohr ist die Basis für die Messung von Drücken. Im Folgenden werden vier verschiedenen Anordnungen gezeigt.

Rohr/U-Rohr Statischer Druck p_{stat}

Wenn ein U-Rohr seitlich am Rohr befestigt wird, kann der statische Druck gemessen werden.

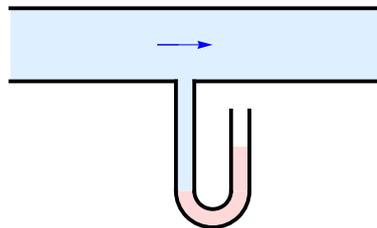


Abbildung Anordnung zur Messung des statischen Drucks

$$\Delta p = \rho_{\text{Fl}} g h = p_{\text{statisch}} - p_{\text{Luft}}$$

$$p_{\text{statisch}} = p_{\text{Luft}} + \Delta p = p_{\text{Luft}} + \rho_{\text{Fl}} g h$$

Pitot-Rohr Gesamtdruck p_{G}

Wenn ein U-Rohr mit einem Arm in die Strömung gehalten wird, kann der Gesamtdruck gemessen werden.

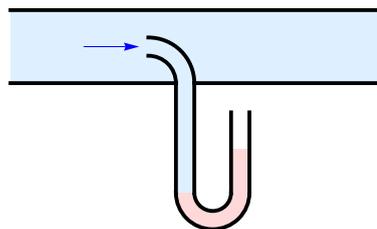


Abbildung Schema für ein Pitot-Rohr zur Messung des Gesamtdrucks

$$\Delta p = \rho_{\text{Fl}} g h = p_{\text{gesamt}} - p_{\text{Luft}}$$

$$p_{\text{gesamt}} = p_{\text{Luft}} + \Delta p = p_{\text{Luft}} + \rho_{\text{Fl}} g h$$

Prandtl-Staurohr Dynamischer Druck p_{dyn}

Wenn ein U-Rohr seitlich am Rohr befestigt wird und das andere Ende in die Strömung gehalten wird, kann der dynamische Druck gemessen werden.

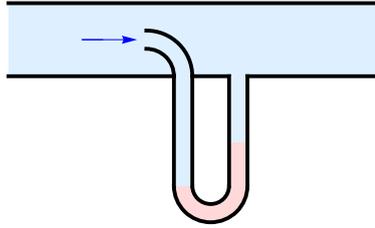


Abbildung Schema für ein Prandtl-Staurohr zur Messung des dynamischen Drucks

$$\Delta p = \rho_{\text{Fl}} g h = p_{\text{gesamt}} - p_{\text{statisch}} = p_{\text{dynamisch}}$$

$$p_{\text{dynamisch}} = \Delta p = \rho_{\text{Fl}} g h$$



Abbildung Prandtl-Staurohr einer F/A-18. ([Link](#))

Man erkennt 5 Bohrungen zur Aufnahme des statischen Drucks.

Venturi-Rohr Differenz zweier statischer Drücke Δp_{stat}

Wenn ein Arm eines U-Rohrs seitlich vor der Verengung und der andere nach der Verengung angebracht werden, kann die Differenz zweier statischer Drücke und damit die Geschwindigkeit der Strömung bestimmt werden.

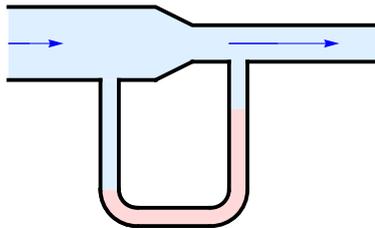


Abbildung Venturi-Rohr zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit

Mit Hilfe der Differenz zweier statischer Drücke können gemäss Bernoulli Gleichung ...

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$(1) \quad \Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

und der Kontinuitätsgleichung ...

$$(2) \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad (2)' \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

die Geschwindigkeiten der Strömung berechnet werden. Nämlich mittels ...

$$(2)' \text{ in } (1) \quad \Delta p = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{A_1}{A_2} v_1 \right)^2$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right)}}$$

Die Geschwindigkeit v_2 findet man durch Einsetzen von v_1 in die Gleichung (2)‘.

Druck in Strömungen

Wir wissen nun ...

- Wenn ein Rohr seitlich angebracht wird, zeigt die Steighöhe den statischen Druck an.
- Wenn ein Rohr in die Strömung gehalten wird, zeigt die Steighöhe den Gesamtdruck an.
- Die Differenz dieser beiden Steighöhen gibt den dynamischen Druck an.

Übersichtlich dargestellt zeigen sich die Drücke bei einer Verengung folgendermassen.

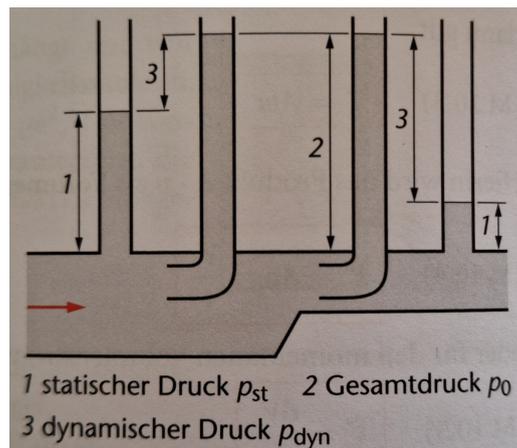


Abbildung Druck in einem Rohr entlang einer Strömung (Kuchling)

Wir sehen, dass der Gesamtdruck (gemäss Bernoulli) vor der Verengung und nach der Verengung gleich gross sind.

Wegen der grösseren Geschwindigkeit der Strömung im verengten Rohr ist der dynamische Druck dort grösser und der statische Druck dementsprechend kleiner.

Anwendung - Wasserstrahl im Waschbecken

Die Beobachtung eines Wasserstrahls, der bei einem Waschbecken ausfliesst, zeigt uns ...

- Der Wasserstrahl verengt sich mit der Fallhöhe.
- Es bilden sich dann einzelne Wassertropfen.

Wie erklärt sich das?

- Auf zwei unterschiedlichen Höhen bewegt sich in einer bestimmten Zeit t die gleiche Wassermenge vorbei (sonst müsste sich ja im Zwischenraum Wasser entleeren oder anhäufen). Der Volumenstrom \dot{V} ist somit konstant ...

$$\dot{V} = \text{konstant} = A v$$

- Die Geschwindigkeit v der einzelnen Wassermoleküle wird aufgrund der Gewichtskraft (Erdschwerkraft) jedoch beim Fallen immer grösser.
- Daraus folgt, dass die Querschnittsfläche A des Wasserstrahls abnehmen muss.
- Die Querschnittsfläche wird jedoch nicht beliebig klein. Ab einer bestimmten Grösse setzt aufgrund der Kohäsionskräfte (Oberflächenspannung) die Tröpfchenbildung ein. Genaueres dazu im Abschnitt "Molekularkräfte" des Skripts "Ruhende Flüssigkeiten und Gase".

Laminare Strömungen

Dynamische Viskosität

Die zweite Art von Strömungen sind laminare Strömungen. Sie haben eine innere Reibung, die im Inneren des Fluids auftritt. Die Ursache sind die Kräfte zwischen den Molekülen in benachbarten Schichten, die sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen.

Wenn eine ebene Platte gegen eine ebene Platte bewegt wird, dann sind die Randschichten in Ruhe bezogen auf die jeweilige Platte. In der Zwischenschicht entsteht deshalb ein Geschwindigkeitsgefälle

$$\frac{\Delta v}{\Delta d}$$

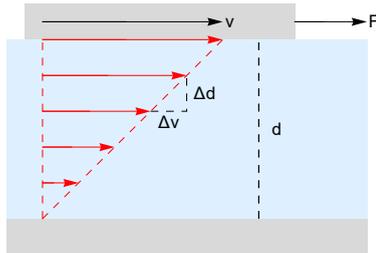


Abbildung Geschwindigkeitsgefälle in der Strömung auf Grund innerer Reibung

Je grösser die innere Reibung (Zähigkeit, Viskosität) der Flüssigkeit ist, desto grösser muss die Kraft sein, um die obere Platte mit der Geschwindigkeit v parallel zu ziehen. Es ergibt sich experimentell der folgende Zusammenhang ...

$$F_R = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta d}$$

zwischen der Reibungskraft F_R , der dynamischen Viskosität η , der Fläche A und dem Geschwindigkeitsgradienten bzw. Geschwindigkeitsgefälle $\frac{\Delta v}{\Delta d} = \frac{v}{d}$, der bzw. das uns sagt, wie sich die Geschwindigkeit quer zur Schicht ändert. Wenn sich die Geschwindigkeit nicht gleichmässig ändert, dann muss mit Differenzialen gerechnet werden (d.h. $F_R = \eta A \frac{dv}{dd}$).

Die Grösse η (Eta) ist die sogenannte **dynamische Viskosität** und hat die Einheit ...

$$[\eta] = \text{Pascalsekunde} = \text{Pa s} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$$

Bemerkungen

- Die dynamische Viskosität ist stark temperaturabhängig.
- Typische Werte sind ...

■ Wasser	1.002 mPa s	bei 20 °C
■ Olivenöl	80.8 mPa s	bei 20 °C
■ Luft	17.2 μ Pa s	bei 0 °C und 1013 hPa

Für einige einfache geometrische Situationen kann das Strömungsprofil, der Volumenstrom oder die Reibungskraft berechnet werden.

Laminare Strömung durch ein Rohr und Gesetz von Hagen-Poiseuille

Bei einer laminaren Strömung durch ein Rohr haben die Moleküle am Rand die Geschwindigkeit Null, und in der Mitte des Rohrs ist die Geschwindigkeit am grössten. Mit etwas Integralrechnung findet man das folgende Geschwindigkeitsprofil $v[r]$...

$$v = \frac{\Delta p}{4 L \eta} (R^2 - r^2)$$

im Abstand r von der Mitte des Rohrs. Dabei kommen die folgenden Grössen vor ...

R	Radius des Rohrs
L	Länge des Rohrs
η	dynamische Viskosität
Δp	Druckdifferenz zwischen den beiden Rohrenden

Auf Grund der inneren Reibung muss eine Druckdifferenz (Kraft) zwischen den beiden Rohrenden vorhanden sein, damit überhaupt eine Bewegung möglich ist. Wir sehen, dass das Geschwindigkeitsprofil eine quadratische Funktion ist (wegen r^2 Abhängigkeit). Das Profil ist somit eine Parabel (besser Paraboloid, da wir uns im 3D befinden) mit dem Maximum im Zentrum.

Mit Hilfe relativ einfacher Integralrechnung lässt sich auch der Volumenstrom berechnen. Er ergibt sich zu ...

$$\dot{V} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 \eta L} \quad \text{Gesetz von Hagen-Poiseuille}$$

Der Volumenstrom wird somit **grösser**, wenn ...

- die Druckdifferenz grösser wird,
- der Radius grösser wird (SEHR starke Abhängigkeit),
- die Viskosität kleiner wird,
- die Rohrlänge kleiner wird.

Der Druckabfall im Rohr ist bei konstantem Volumenstrom (bzw. Geschwindigkeit und Querschnitt) proportional zur Länge ...

$$\Delta p = \frac{\dot{V} 8 \eta L}{\pi R^4} \sim L$$

Die **Reibungskraft** bei einer laminaren Strömung in einem Rohr ergibt sich dann zu ...

$$F_R = \pi R^2 \Delta p = \pi R^2 \frac{\dot{V} 8 \eta L}{\pi R^4} = \frac{\dot{V} 8 \eta L}{R^2}$$

und mit $\dot{V} = A \bar{v} = \pi R^2 \bar{v}$ \bar{v} ist die durchschnittliche Geschwindigkeit im Rohr

erhalten wir $F_R = 8 \pi \eta L \bar{v}$

Laminare Strömung um eine Kugel und Gesetz von Stokes

Ein weiteres Beispiel, das analytisch berechnet werden kann, ist die laminare Strömung um eine Kugel (bzw. die Bewegung einer Kugel in einem Fluid). Es resultiert ...

$$F_R = 6 \pi \eta r v \quad \text{Gesetz von Stokes}$$

wobei hier r der Radius der umströmten Kugel ist.

Messung der dynamischen Viskosität η

Mit Hilfe des Gesetzes von Stokes lässt sich die dynamische Viskosität eines Fluids bestimmen. Nach anfänglichen Beschleunigung erlangt die Kugel eine konstante Fallgeschwindigkeit, und es gilt ...

$$\begin{aligned} F_{\text{Reibung}} &= F_{\text{Gewicht}} - F_{\text{Auftrieb}} \\ 6 \pi \eta r v &= \left(\frac{4 \pi}{3} r^3\right) \rho_{\text{Kugel}} g - \left(\frac{4 \pi}{3} r^3\right) \rho_{\text{Fluid}} g \\ \eta &= \frac{2(\rho_{\text{Kugel}} - \rho_{\text{Fluid}}) r^2 g}{9 v} \end{aligned}$$

Wenn die Dichten und der Kugelradius bekannt sind und die konstante Sinkgeschwindigkeit gemessen wird, lässt sich die dynamische Viskosität bestimmen.

Beispiel Fall einer kleinen Kugel im Wasser

Wir untersuchen im Folgenden den freien Fall einer kleinen Kugel (mit einem Radius von $1 \mu\text{m}$ und einer Dichte von $\rho = 2.65 \text{ g cm}^{-3}$) in Wasser.

- Am Anfang hat die Kugel die Geschwindigkeit $v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Dann wirken die Erdanziehungskraft/Gewichtskraft F_G nach unten und die Auftriebskraft F_A nach oben.
- Wenn $F_G > F_A$, dann beschleunigt die Kugel nach unten und die Geschwindigkeit und somit auch der Strömungswiderstand F_W , der nach oben wirkt, werden grösser.
- Diese Beschleunigung findet so lange statt, bis die Gewichtskraft gleich gross wie die Auftriebskraft plus die Strömungswiderstandskraft ist.

Wir erhalten dann die folgende Beziehung ...

$$F_G = F_A + F_W$$

Mit den Formeln ...

Gewichtskraft	$F_G = m g = \rho_{\text{Körper}} V_{\text{Körper}} g$
Auftriebskraft	$F_A = \rho_{\text{Wasser}} V_{\text{Körper}} g$
Strömungswiderstandskraft	$F_W = 6 \pi \eta v r$ (laminare Strömung)

und den Materialwerten ...

$\eta = 1.002 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$	für Luft, Tabelle 6 (Kuchling)
$\rho_{\text{Wasser}} = \rho_W = 998.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Tabelle 1b (Kuchling)

und der Gleichung für das Volumen einer Kugel ...

$$V_{\text{Körper}} = V_K = \frac{4\pi}{3} r^3$$

erhalten wir ...

$$\rho_K V_K g = \rho_W V_K g + 6 \pi \eta v r$$

und weiter ...

$$v = \frac{\rho_K V_K g - \rho_W V_K g}{6 \pi \eta r} = \frac{(\rho_K - \rho_W) V_K g}{6 \pi \eta r} = \frac{(2650 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 998.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}) \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{4\pi}{3} (10^{-6} \text{ m})^3}{6 \pi \cdot 1.002 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s} \cdot 10^{-6} \text{ m}} \approx 3.59 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Reynoldsche Zahl (siehe später) bestätigt, dass es sich um eine laminare Strömung handelt (und wir deshalb die korrekte Formel verwendet haben) ...

$$\text{Re} = \frac{\rho_W v d}{\eta} = \frac{998.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3.59374 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{1.002 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}} \approx 7.16022 \cdot 10^{-6} \quad \text{sicher laminar}$$

Pitch Drop Experiment

Mit Teer (das eine sehr hohe Viskosität hat) läuft das (gemäss Guinness Book of Records) am längsten andauernde Labor-Experiment ([Link](#)). Bei diesem Experiment läuft Teer tröpfchenweise aus einem Trichter heraus.



Abbildung Das berühmte “Pitch Drop Experiment”

- Dieses Experiment läuft seit 1927.
- Es sind erst 9 Tropfen herausgeflossen. Der letzte im Jahr 2014.
- Der 10. Tropfen kommt irgendwann in den 2020er Jahren.

Turbulente Strömungen

Strömungswiderstand

Nun kommen wir zum (rechnerisch) schwierigsten Teil. Dies ist der Fall, wenn in der Strömung Turbulenzen und Wirbel auftreten. Mit Experimenten können wir jedoch diese Situationen in den Griff bekommen.

Wir kennen den Zusammenhang von früher ...

$$\text{Kraft} = \text{Druck} \cdot \text{Fläche}$$

Wenn wir für den Druck den dynamischen Druck ($\frac{1}{2} \rho v^2$) einsetzen, folgt für ein Hindernis in einer Strömung ...

$$F_{\text{Strömungswiderstand}} = c_W \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) A$$

ρ	Dichte des strömenden Mediums
A	der Strömung entgegenstehender Körperquerschnitt
v	Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Fluid
c_W	Widerstandsbeiwert

Wir sehen, dass der Strömungswiderstand mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wächst.

In der obigen Formel wurde ein Faktor, der sogenannte **Widerstandsbeiwert c_W** eingefügt. Dieser muss in der Regel experimentell bestimmt werden, da die Berechnungen zu kompliziert oder unmöglich sind.

Die Einheit des Widerstandsbeiwerts ist ...

$$[c_W] = 1$$

Typische Werte für c_W sind ...

- Stromlinienkörper ≈ 0.05
- Rennwagen $\approx 0.15 - 0.20$
- LKW ≈ 0.9



Abbildung Nichtstationäre Strömungen im Rauchkanal (Schreiner, Seite 218) bei verschiedenen Hindernissen.

Wenn ein Körper mit der Geschwindigkeit $v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in Luft fallengelassen wird, ...

- beschleunigt er auf Grund der Erdanziehungskraft F_G ,
- dadurch werden die Geschwindigkeit und somit auch der Strömungswiderstand F_W grösser.
- Diese Beschleunigung findet so lange statt, bis die Erdanziehungskraft und die Strömungswiderstandskraft gleich gross sind.

Wir erhalten dann die folgende Beziehung (wenn wir den Auftrieb in Luft gegenüber der Gewichtskraft vernachlässigen) ...

$$m g = c_W \frac{1}{2} \rho_L v^2 A$$

Und damit die (konstante) End-Sinkgeschwindigkeit ...

$$v = \sqrt{\frac{2 m g}{c_W A \rho_L}}$$

Beispiel Fallschirm

Was ist die konstante End-Fallgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers mit geschlossenem und mit geöffnetem Fallschirm?

Mit den Werten ...

$$\rho_L = 1.2923 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Dichte von Luft, Tabelle 1c (Kuchling)

$$m = 100 \text{ kg}$$

Masse des Fallschirmspringers und des Fallschirms

$$d = 12 \text{ m}$$

Durchmesser des Fallschirms

und der Gleichung ...

$$A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Kreisfläche

erhalten wir ...

- bei geschlossenem Fallschirm mit einem Widerstandsbeiwert von $c_W = 0.5$ und einer typischen Querschnittsfläche des Fallschirmspringers von 1 m^2 ...

$$A. \quad v = \sqrt{\frac{2 m g}{c_W A \rho_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0.5 \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 1.2923 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 55 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 198 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

- bei geöffnetem Fallschirm mit einem Widerstandsbeiwert von $c_W = 1.3$ und einem Durchmesser des Fallschirms von $d = 12 \text{ m}$...

$$B. \quad v = \sqrt{\frac{2 m g}{c_W A \rho_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1.3 \cdot \pi \left(\frac{12 \text{ m}}{2}\right)^2 \cdot 1.2923 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 3.21 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 11.6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Wir haben oben die Formel für eine turbulente Strömung genommen. Haben wir wirklich eine turbulente Strömung? Die Antwort liefert die Reynolds-Zahl (siehe nächsten Abschnitt). Mit Hilfe der dynamischen Viskosität von Luft $\eta = 17.2 \mu\text{Pa s}$ erhalten wir ...

$$A. \quad \text{Re} = \frac{L \rho v}{\eta} = \frac{1 \text{ m} \cdot 1.2923 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 55 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{17.2 \cdot 10^{-6} \text{ Pa s}} = 4.13235 \times 10^6 \quad \text{sicher turbulent}$$

$$B. \quad \text{Re} = \frac{L \rho v}{\eta} = \frac{12 \text{ m} \cdot 1.2923 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3.21 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{17.2 \cdot 10^{-6} \text{ Pa s}} = 2.89415 \times 10^6 \quad \text{sicher turbulent}$$

Beispiel Regentropfen

Was ist die konstante End-Fallgeschwindigkeit eines Regentropfens mit dem Durchmesser von 2 mm?

Mit den Werten ...

$$\rho_L = 1.2923 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Dichte von Luft, Tabelle 1c (Kuchling)

$$\rho_W = 998.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Dichte von Wasser, Tabelle 1b (Kuchling)

$$c_W = 0.25$$

Widerstandsbeiwert (kugelförmig)

und den Beziehungen ...

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \quad \text{und} \quad A = \pi r^2$$

Volumen und Querschnittsfläche des Wassertropfens

$$m = \rho_W V = \rho_W \left(\frac{4}{3} \pi r^3\right) \quad \text{Masse des Wassertropfens}$$

erhalten wir ...

$$v = \sqrt{\frac{2 m g}{c_W A \rho_L}} = \sqrt{\frac{2 * 998,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(\frac{4}{3} \pi \left(\frac{2 * 10^{-3} \text{m}}{2}\right)^3\right) * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,25 * \pi \left(\frac{2 * 10^{-3} \text{m}}{2}\right)^2 * 1,2923 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 9,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 32 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Wir haben oben die Formel für eine turbulente Strömung genommen. Haben wir wirklich eine turbulente Strömung? Die Antwort liefert die Reynolds-Zahl (siehe nächster Abschnitt). Mit Hilfe der dynamischen Viskosität von Luft $\eta = 17,2 \mu\text{Pa s}$ erhalten wir ...

$$Re = \frac{L \rho_L v}{\eta} = \frac{2 * 10^{-3} \text{m} * 1,2923 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 9,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{17,2 * 10^{-6} \text{Pa s}} \approx 1352 \quad \text{eher turbulent}$$

Reynold'sches Ähnlichkeitsgesetz

Im Zusammenhang mit Strömungen ist die sogenannte **Reynolds-Zahl Re** eine wichtige Grösse, da der Widerstandsbeiwert c_W nur von ihr abhängt. Sie ist definiert als ...

$$Re = \frac{L \rho v}{\eta}$$

- L Eine für den jeweiligen Körper charakteristische Länge
- ρ Dichte des Fluids
- v Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Fluid
- η dynamische Viskosität

Bei kleinen Geschwindigkeiten (Re klein) haben wir sicher eine laminare Strömung. Wenn die Geschwindigkeit vergrößert wird, dann wird eine kritische Geschwindigkeit v_{krit} bzw. eine kritische Reynolds-Zahl Re_{krit} erreicht, bei der die laminare Strömung in eine turbulente umschlägt. Die Reynolds-Zahl ermöglicht es, abzuschätzen, ob es sich bei einer gegebenen Situation um eine laminare oder um eine turbulente Strömung handelt. Es gilt ...

- $Re \ll 1$ sicher laminare Strömung
- $1 < Re < 2000$ Übergang laminar/turbulent
- $Re \gg 2000$ sicher turbulente Strömung

Wenn zwei experimentelle Situationen die gleiche Reynolds-Zahl haben, dann haben sie ein ähnliches Strömungsverhalten. Dies ist die Aussage des **Ähnlichkeitsgesetzes**.

Geometrisch ähnliche Körper besitzen gleiche Widerstandsbeiwerte, wenn sie in der Reynolds-Zahl übereinstimmen. Dann sind auch die beiden Strömungen ähnlich.

Wir können somit aussagekräftige Strömungsmessungen an einem kleineren Modell durchführen, wenn wir gleichzeitig die Geschwindigkeit und die dynamische Viskosität so anpassen, dass die gleiche Reynolds-Zahl resultiert.

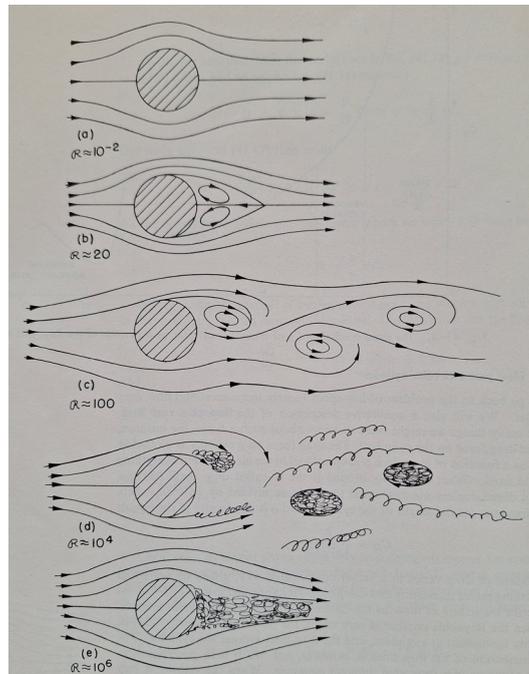


Abbildung Strömung um einen Zylinder bei verschiedenen Reynoldszahlen (Feynman, 41-8)

Magnus Effekt

Der nach Heinrich Gustav Magnus (1802 - 1870) benannte **Magnus Effekt** tritt immer dann auf, wenn sich ein rotierender Körper relativ zu einem Fluid bewegt (beispielsweise ein rotierender Ball in Luft).

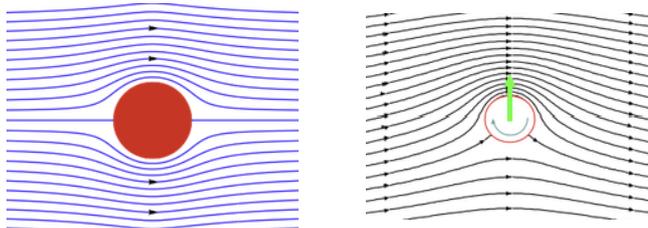


Abbildung Nicht-Rotierender und Rotierende Zylinder in einer Strömung ([Link](#)).

In der Abbildung links haben wir eine symmetrische Situation. Die durch den Bernoulli-Effekt resultierenden Kräfte nach innen (siehe das Experiment mit dem Tischtennis-Ball im Anhang) sind oben und unten gegen die Mitte gerichtet.

In der Abbildung rechts haben wir beim rotierenden Körper oben und unten unterschiedliche Relativgeschwindigkeiten von Zylinder und Strömung. Im obigen Beispiel verläuft die Strömung von links nach rechts und der Körper rotiert im Uhrzeigersinn. Wenn die Geschwindigkeit der Strömung gleich v ist und der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, dann haben wir die folgenden Relativgeschwindigkeiten am äusseren Rand des Zylinders mit dem Radius r ...

$$v_{\text{oben}} = v + \omega r$$

$$v_{\text{unten}} = v - \omega r$$

Grösseres v oben heisst grösseren dynamischen Druck. Und dies wiederum heisst kleineren statischen Druck. Wir haben also oben einen kleineren Druck als unten und somit eine Kraft, die nach oben wirkt.

Es gilt für die Stellen beim Zylinder ganz oben und unten ...

$$p_{\text{oben}} + \frac{1}{2} \rho (v_{\text{oben}})^2 = p_{\text{unten}} + \frac{1}{2} \rho (v_{\text{unten}})^2 \quad \text{Bernoulli}$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_{\text{unten}} - p_{\text{oben}} = \frac{1}{2} \rho (v_{\text{oben}})^2 - \frac{1}{2} \rho (v_{\text{unten}})^2 = \frac{1}{2} \rho ((v_{\text{oben}})^2 - (v_{\text{unten}})^2) \\ &= \frac{1}{2} \rho ((v + \omega r)^2 - (v - \omega r)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \rho (v^2 + 2v\omega r + \omega^2 r^2 - v^2 + 2v\omega r - \omega^2 r^2) \\
&= \frac{1}{2} \rho (4v\omega r) = 2\rho v\omega r
\end{aligned}$$

Die Berechnung der resultierenden Kraft auf Grund des Magnus-Effekts ist etwas kompliziert ([Link](#)) und, um die Berechnungen mit dem Experiment vergleichen zu können, müssten auch noch Turbulenzen und Reibungskräfte berücksichtigt werden ([Link](#)).

Beispiele für den Magnus Effekt sind die Topspins oder Slices im Tennis oder die Bananenflanken oder Freistösse im Fussball (siehe den "berühmtesten Freistoss aller Zeiten" von Roberto Carlos ([Link](#) oder [Link](#))).

Navier-Stokes Gleichung

Die Navier-Stokes Gleichungen (vgl. [Link](#)), benannt nach Claude Louis Marie Henri **Navier** (1785 - 1836) und George Gabriel **Stokes** (1819 - 1903), beschreiben die Strömung von Newton'schen Flüssigkeiten und Gasen, bei denen die Schergeschwindigkeit ([Link](#)) proportional zur Scherspannung ([Link](#)) ist ...

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{f}$$

Abbildung Die Navier-Stokes Gleichungen ([Link](#)).

Wir verzichten auf eine Erklärung der verschiedenen Grössen. Die Gleichung sieht nicht nur kompliziert aus, sie ist auch kompliziert ... und auch eine Herausforderung für die Mathematik: Bislang konnte noch nicht bewiesen werden, dass es eine überall definierte eindeutige Lösung für diese Gleichung gibt. Diese Fragestellung ist eines der sieben Millennium-Probleme ([Link](#)). Wer dies beweisen kann, würde 1 Million USD Preisgeld erhalten.

Anhang

Anhang A Experimente

Weiter vorne im Text wurden schon einige Experimente beschrieben, beispielsweise ...

- Druckmessungen mit dem U-Rohr,
- Fall einer kleinen Kugel im Wasser,
- Fall eines Regentropfens sowie eines Fallschirmspringers bei geschlossenem/geöffnetem Fallschirm,
- Magnus-Effekt beim Tennis und Fussball.

Hier möchte ich noch einige Freihand-Experimente beschreiben, die man ohne grossen Aufwand selber durchführen kann.

Das Wind-Paradoxon

Wenn in den Zwischenraum von zwei beweglichen, dicht beieinander stehenden Körpern hineingeblasen wird, dann bewegen sich die beiden Körper aufeinander zu.

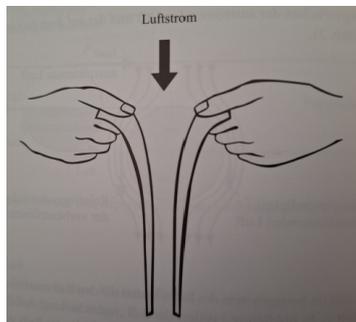


Abbildung Das Wind-Paradoxon (Hilscher, 3.44)

Erklärung

- Aussen herrscht der (statische) Luftdruck.
- Im Zwischenraum herrscht auf Grund der Strömung zusätzlich ein dynamischer Druck.
- Deshalb ist der statische Druck im Zwischenraum kleiner als ausserhalb (Bernoulli-Gesetz).
- Die Druckdifferenz führt zu einer Kraft, die die beiden Blätter aufeinander zubewegen lässt.

Der schwebende Tischtennis-Ball

Wenn ein Tischtennisball sich in einem Luftstrom befindet, dann schwebt er relativ stabil in der Luft.

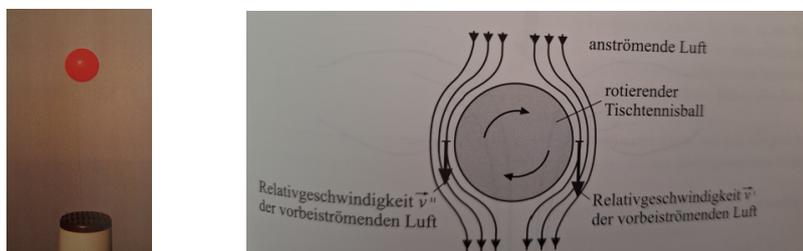


Abbildung Der schwebende Tischtennis-Ball (Werner Rentzsch 3, Hilscher 3.43)

Erklärung

- Die Stromlinien um den Tischtennis-Ball liegen näher beieinander als in der Umgebung.
- Dies impliziert eine höhere Geschwindigkeit.
- Dies führt zu einem grösseren dynamischen und damit kleineren statischen Druck (Bernoulli).
- Diese Druckdifferenz führt zu einer Kraft in Richtung des Tischtennis-Balls und stabilisiert seine Position.

Dieses Experiment kann an Stelle eines Föhn's auch mit einem Trinkhalm und einem leichteren Ball oder einer Bernoulli-Pfeife durchgeführt werden. Die Stabilität ist jedoch geringer.

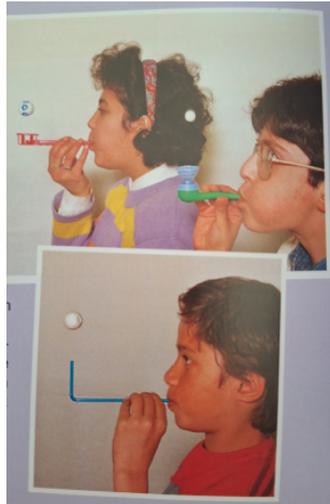


Abbildung links: Bernoulli Effekt beim Trinkhalm und bei der Bernoulli-Pfeife (W. Rentzsch 3)
rechts: Bernoulli Pfeife

Der saugende Blasetrichter

Wenn in den Trichter geblasen wird, dann neigt sich die Flamme zu Trichter hin.



Abbildung Der saugende Blasetrichter (Werner Rentzsch 3, Hilscher 3.41)
Bernoulli !

Anhang B Quellen

Um sich schnellstmöglich ein Bild zu machen, wo die für das Kapitel “Strömungen” relevanten Themen im **Kuchling** und in den beiden **Merkhilfen** gefunden werden können, ist in diesem Anhang eine detaillierte Auflistung gegeben.

Viele weitere Quellen (insbesondere frei zugängliche Wikipedia Artikel) wurden direkt im Text integriert.

Ausserdem dienen die folgenden Quellen ...

- Helmut Hilscher (Koordinator), “Physikalische Freihandexperimente”, Band 1, Mechanik, 5. Auflage, 2018
- Werner Rentzsch, “Experimente mit Spass - Hydro & Aeromechanik, Akustik, 1998/2010
- Richard Feynman et al, “The Feynman Lectures on Physics”, Volume II, 1964
- Josef Schreiner, “Physik 1”, 5. Auflage, 1973

H. Kuchling, “Taschenbuch der Physik”, 2022 (22. Auflage), 714 Seiten

Der für das Kapitel “Strömungen” relevante Teil ist Kapitel 10.

- | | |
|--|------------------|
| 10. Strömungen | Seiten 164 - 178 |
| 10.1 Reibungsfreie Strömung | |
| 10.1.1 Ausfluss aus Gefässen | |
| 10.1.2 Durchfluss durch Röhren | |
| 10.1.3 Druck in Strömungen | |
| 10.1.4 Druckmessung in Strömungen | |
| 10.2 Laminare Strömung | |
| 10.2.1 Dynamische Viskosität (Zähigkeit) | |
| 10.2.2 Laminare Strömung durch ein Rohr | |
| 10.2.3 Laminare Strömung um eine Kugel | |
| 10.3 Turbulente Strömung | |
| 10.3.1 Strömungswiderstand | |
| 10.3.2 Strömungsleistung | |
| 10.3.3 Reynolds’sches Ähnlichkeitsgesetz | |

N. Marxer, “Physik Merkhilfe”, 2019, 55 Seiten

Auf den folgenden Seiten können die relevanten Inhalte zum Kapitel “Strömungen” gefunden werden ...

- | | |
|-------------|------------|
| Seite 12-13 | Strömungen |
|-------------|------------|

Anhang C Kurze historische Entwicklung

Die folgende Kurzübersicht wurde der Wikipedia Quelle “Strömungsmechanik” ([Link](#)) entnommen.

- **Archimedes** (287–212 v. Chr.) befasste sich mit strömungsmechanischen Fragestellungen (Archimedisches Prinzip, Archimedische Schraube).
- Sextus Iulius **Frontinus** (ca. 35–103 n. Chr.) dokumentierte seine Kenntnisse über die Wasserversorgung in der Antike über tausend Jahre, bevor sich Leonardo **da Vinci** (1452–1519) mit Strömungsvorgängen auseinandersetzte.
- Galileo **Galilei** (1564–1642) gab Impulse in der experimentellen Hydrodynamik und überarbeitete das von Aristoteles eingeführte Konzept des Vakuums.
- Evangelista **Torricelli** (1608–1647) erkannte im Gewicht der Erdatmosphäre die Ursache des Luftdrucks und verband den horizontal ausgestoßenen Flüssigkeitsstrahl mit den Gesetzen des freien Falls (Torricelli’sches Ausflussgesetz).
- Blaise **Pascal** (1623–1662) beschäftigte sich unter anderem mit der Hydrostatik und formulierte den Satz von der allseitigen Druckfortpflanzung.
- Edme **Mariotte** (1620–1684) lieferte Beiträge zu Problemen der Flüssigkeiten und Gase und stellte dabei erste Konstitutivgesetze auf.
- Henri de **Pitot** (1695–1771) untersuchte den Staudruck in Strömungen.
- Isaac **Newton** veröffentlichte 1686 seine dreibändige Principia mit den Bewegungsgesetzen und definierte zudem im zweiten Buch die Viskosität einer idealen (newtonschen) Flüssigkeit.
- Daniel **Bernoulli** (1700–1782) begründete die Hydromechanik, indem er Druck und Geschwindigkeit in der nach ihm benannten Energiegleichung verband und Leonhard **Euler** (1707–1783) formulierte die Bewegungsgleichungen für ideale Flüssigkeiten. Von nun an konnten Erkenntnisse auch durch Untersuchungen der mathematischen Gleichungen gewonnen werden.
- Jean-Baptiste le Rond **d’Alembert** (1717–1783) führte die eulersche Betrachtungsweise und komplexe Zahlen in der Potentialtheorie ein, leitete die lokale Massenbilanz her und formulierte das d’Alembert’sche Paradoxon, demgemäß von der Strömung idealer Flüssigkeiten auf einen Körper keine Kraft in Richtung der Strömung ausgeübt wird (was Euler schon vorher bewies). Wegen dieser und anderer Paradoxien reibungsfreier Strömungen war klar, dass die Euler’schen Bewegungsgleichungen zu ergänzen sind.
- Claude Louis Marie Henri **Navier** (1785–1836) und **George Gabriel Stokes** (1819–1903) erweiterten die Euler’schen Bewegungsgleichungen um viskose Terme zu den Navier-Stokes-Gleichungen, die Strömungen realitätsnah modellieren.
- Giovanni Battista **Venturi** (1746–1822), Gotthilf Heinrich Ludwig **Hagen** (1797–1884) und Jean Léonard Marie **Poiseuille** (1799–1869) führten experimentelle Untersuchungen in Strömungen durch.
- William **Froude** (1810–1879) ermittelte den Schwimmwiderstand von Schiffen.
- Ernst **Mach** (1838–1916) leistete Pionierarbeit in der Überschallaerodynamik.

- Lord **Rayleigh** (1842–1919) untersuchte hydrodynamische Instabilitäten, und Vincent **Strouhal** (1850–1922) erforschte die Schwingungsanregungen durch ablösende Wirbel.
- Hermann von **Helmholtz** (1821–1894) formulierte die nach ihm benannten Wirbelsätze und begründete durch mathematisch ausgearbeitete Untersuchungen über Wirbelstürme und Gewitter die wissenschaftliche Meteorologie.
- Weitere bahnbrechende Arbeiten wurden von Osborne **Reynolds** (1832–1912, Reynolds-Gleichungen, Reynoldszahl) und Ludwig **Prandtl** (1875–1953, unter anderem zur hydrodynamischen Grenzschicht) vorgelegt.
- Andrei Nikolajewitsch **Kolmogorow** (1903–1987) erweiterte die Theorie der turbulenten Strömung.
- Ab Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelten sich die Strömungsmesstechnik und die numerische Strömungsmechanik so weit, dass mit ihrer Hilfe Lösungen für praktische Probleme gefunden werden können.